L'orthogonalisation simultanée appliquée à l'imagerie du tenseur de diffusion
Simultaneous orthogonalization applied to diffusion tensor imaging

Félix Renard[1,2], Christian Heinrich[1], Stéphane Kremer[2]
[1] LSIIT, UMR ULP-CNRS 7005, Bld S. Brant BP 10413, 67412 Illkirch Cedex , France
[2] LINC, UMR ULP-CNRS 7191, 4 rue Kirschleger, 67085 Strasbourg Cedex, France
felix.renard@lsiit.u-strasbg.fr

Résumé

L'IRM du tenseur de diffusion est un type d'imagerie bien connu. Cependant la comparaison de deux tenseurs reste encore complexe. Dans cette communication, nous proposons d'utiliser l'orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques pour simplifier cette comparaison. Nous allons appliquer cette transformation à l'interpolation entre deux tenseurs, ainsi qu'à la morphologie mathématique.

Mots Clef

Orthogonalisation simultanée, tenseur de diffusion, interpolation, morphologie mathématique

Abstract

MRI-Diffusion Tensor imaging is a well-known kind of imaging. Nevertheless comparison between two tensors remains difficult. In this paper, we propose to use simultaneous orthogonalization of two quadratic forms to simplify this comparison. We will show the benefit of this transformation on interpolation and mathematical morphology.

Keywords

Simultaneous orthogonalization, DTI, interpolation, mathematical morphology

1 Introduction

L'Imagerie par Résonance Magnétique de diffusion (IRMd) [1] permet de mettre en évidence l'architecture neuronale de manière in vivo grâce à ses propriétés de diffusion. C'est de cette étude qu'est née l'imagerie du tenseur de diffusion (Diffusion Tensor Imaging) [2]. Sous hypothèse de diffusion gaussienne, on associe à chaque voxel un tenseur d'ordre deux représentant la diffusion locale.
Malgré la richesse informationnelle du tenseur, la plupart des études actuelles se ramènent à des cas scalaires (Fraction d'Anisotropie, Diffusion Moyenne...) car les techniques d'études sont mieux maîtrisées. Cependant la réduction du tenseur à une donnée scalaire nous enlève une part d'information utile pour des études plus fines.
En associant au tenseur son ellipsoïde, on se ramène à un problème géométrique, à savoir la comparaison de deux ellipsoïdes entre eux. Cette comparaison est délicate car il y a une notion de forme (longueurs des axes de l'ellipsoïde) et une notion d'orientation (orientation des axes). Dans cette communication, nous proposons d'utiliser une transformation algébrique, l'orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques [3], pour nous affranchir du problème d'orientation.
Nous allons dans un premier temps présenter cette transformation. Dans un deuxième temps, nous étudierons deux applications possibles de cette transformation : l'interpolation et la définition d'un maximum.

2 Orthogonalisation simultanée

Soient q_1 et q_2 deux formes quadratiques définies positives, et D_1 et D_2 les deux matrices symétriques définies positives associées (équivalentes aux tenseurs d'ordre 2). Le théorème d'orthogonalisation simultanée [3] indique qu'il existe une base orthonormée pour q_1 et orthogonale pour q_2.
La traduction matricielle de ce théorème est qu'il existe une matrice P telle que :

$$P^T D_1 P = I \text{ et } P^T D_2 P = \Lambda \tag{1}$$

avec I la matrice identité, et Λ une matrice diagonale.
En effectuant ce changement de base, deux matrices symétriques définies positives ne diffèrent plus que de 3 paramètres entre elles, alors qu'elles diffèrent de 6 paramètres dans la base canonique en dimension 3.
En pratique, on cherche les vecteurs propres de la matrice $D_1^{-1}D_2$. Dans cette base, les deux matrices sont diagonales, mais pas forcément égales à la matrice identité. Ces vecteurs propres sont appelés directions principales si les valeurs propres associées sont toutes distinctes. Le lecteur pourra obtenir plus d'information sur la construction de ces directions principales dans [3].

3 Applications

Nous allons, dans la suite, utiliser cette nouvelle base, formée des directions principales pour étudier l'interpolation, puis le maximum entre deux tenseurs.

3.1 Interpolation

L'interpolation entre deux ellipsoïdes quelconques ayant leurs axes portés par les mêmes vecteurs se fait de manière

intuitive. On modifie de manière linéaire et simultanée les coordonnées sur chaque axe de l'une des ellipsoïdes pour les transformer en ceux de l'autre ellipsoïde. Dans le cas de deux ellipsoïdes quelconques, on peut toujours se ramener au cas précédent avec l'orthogonalisation simultanée.
L'interpolation entre deux ellipsoïdes peut s'écrire sous la forme :

$$D(t) = P^{-T}[t\Lambda_2 + (1-t)\Lambda_1]P^{-1} \text{ avec } t \in [0,1] \quad (2)$$

Λ_i étant la matrice D_i exprimée dans la nouvelle base, et P la matrice de changement de base.
Si on développe cette dernière équation, on obtient l'interpolation linéaire usuelle entre deux tenseurs, définie comme :

$$D(t) = tD_2 + (1-t)D_1 \text{ avec } t \in [0,1] \quad (3)$$

Le principal problème de l'interpolation linéaire au sens de (3) est qu'elle n'est pas linéaire pour les propriétés usuelles de l'ellipsoïde (orientation, volume, norme des axes). Dans cette nouvelle base, on observe que cette interpolation modifie de manière linéaire une propriété géométrique, les directions principales.
La méthode décrite en (2) ne se veut pas être une nouvelle interpolation [4], mais donne une nouvelle vision géométrique de l'interpolation euclidienne usuelle.

3.2 Maximum et morphologie mathématique

La morphologie mathématique nécessite la définition d'un maximum et d'un minimum (ou au moins d'une borne supérieure et inférieure) pour définir les opérateurs usuels (dilatation, érosion...). La notion de maximum est elle-même liée à la notion d'ordre. Dans l'espace des matrices symétriques définies positives, la difficulté réside dans le fait qu'il n'existe pas d'ordre total. Différents ordres ont été proposés dans [5] pour l'imagerie tenseur de diffusion. On va définir un maximum à partir de notre transformation, selon :

$$max(D_1, D_2) = P^{-T}\begin{pmatrix} max(\lambda_{1,1}, \lambda_{1,2}) & 0 \\ 0 & max(\lambda_{2,1}, \lambda_{2,2}) \end{pmatrix} P^{-1} \quad (4)$$

On prend le maximum entre la valeur propre $\lambda_{i,1}$ et $\lambda_{i,2}$ pour chaque direction principale V_i. P^{-1} est l'inverse de la matrice de passage de la base usuelle à la base formée des directions principales.
On peut étendre ce maximum à un ensemble de matrices symétriques définies positives en procédant de manière itérative, avec la construction de maxima intermédiaires.
On peut voir le résultat pour deux matrices à la Fig2. Notre maximum introduit en (4) est innovant de par sa construction géométrique, préférée à des constructions algébriques telles que celle décrite en [5].

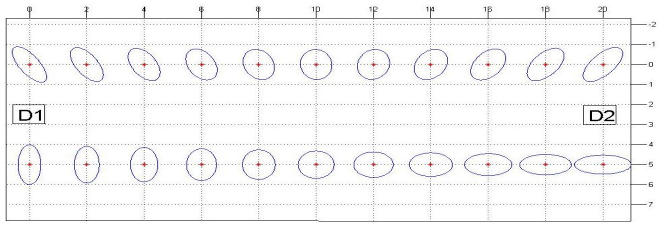

FIG. 1 – Interpolation entre deux tenseurs D_1 et D_2. La ligne supérieure correspond à l'interpolation dans la base usuelle, la ligne inférieure correspond à l'interpolation dans la base des directions principales.

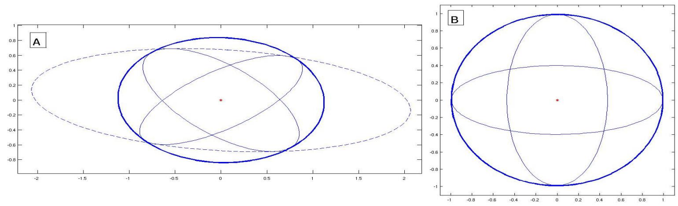

FIG. 2 – A- En trait fin, les deux ellipses ; en gras, le maximum calulé en (4), en pointillé, celui calcul dans [5].
B- En trait fin, les deux ellipses dans la nouvelle base, et en gras le maximum calculé en (4).
[4]

4 Conclusion

Nous avons introduit une transformation créant une nouvelle base pour faciliter les comparaisons entre deux tenseurs, et nous affranchir du problème lié à l'orientation. Cette nouvelle base nous permet d'appréhender différents problèmes, tels que l'interpolation et le maximum entre deux tenseurs, d'un point de vue géométrique nouveau, préféré à un point de vue algébrique traditionnel.

Références

[1] D Le Bihan, E Breton, D Lallemand, P Grenier, E Cabanis, and M Laval-Jeantet, "MR imaging of intravoxel incoherent motions : application to diffusion and perfusion in neurologic disorders," *Radiology*, vol. 161, no. 2, pp. 401–407, 1986.

[2] P J Basser, J Mattiello, and D LeBihan, "MR diffusion tensor spectroscopy and imaging.," *Biophysical Journal*, vol. 66, no. 1, pp. 259–267, 1994.

[3] A Paugam, *Agrégation de mathématiques - Questions délicates en algèbre et géométrie - Cours et exercices*, Dunod Ed.,2007.

[4] V. Arsigny, X. Pennec, and N. Ayache, "Fast and simple calculus on tensors in the log-euclidean framework," *Proceedings of MICCAI*, pp. 115–122, 2005.

[5] B. Burgeth, A. Bruhn, N. Papenberg, M. Welk, and J. Weickert, "Mathematical morphology for matrix fields induced by the Loewner ordering in higher dimensions," *Signal Processing*, vol. 87, no. 2, pp. 277 – 290, 2007.